

PROBLEMAS DE FÍSICA. CALCULO VECTORIAL

PROBLEMA.1

El origen de un vector es el punto A(0,2,1) y su extremo es el punto B(3,2,2). Calcular:

a) Componentes del vector y ecuación de su recta soporte en forma continua

b) Momento del vector respecto a la recta $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$

Resolución.

a) Las componentes del vector se obtienen como diferencia de las coordenadas del extremo y origen del vector, por tanto expresa como:

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + \vec{k}$ y la ecuación de su recta soporte en forma continua se obtiene a partir de un punto y su dirección:

$$\frac{x-0}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}$$

b) Momento axial o momento del vector respecto a una recta se obtiene por la proyección del momento respecto a un punto de la recta o eje dado, en este caso E (4,2,3). El momento respecto al punto E es:

$$\vec{M}_E = \overrightarrow{EA} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{j}$$

Considerando el vector unitario en dirección de la recta: $\vec{u}_{eje} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$

La proyección de un vector sobre una dirección se obtiene multiplicando por un vector unitario en dicha dirección:

$$M_{axial} = \vec{M}_E \cdot \vec{u}_{eje} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

PROBLEMA 2

Un sistema de vectores deslizantes (s.v.d) concurrente en un punto A(1,1,1) su resultante es el vector $\vec{R} = 2\vec{j}$. Calcular:

a) Momento resultante respecto a O (0,0,0) y respecto a B (1,2,1).

b) Vector momento mínimo y ecuación del eje central.

Resolución.

a) El momento de un sistema de vectores deslizantes concurrentes, respecto a un punto O, es igual al Momento de la resultante aplicada en el punto de concurrencia (A) respecto al mismo punto O. El momento resultante respecto a O (0,0,0) se obtiene:

$$\vec{C}_0 = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$$

El momento respecto a B(1,2,1) se obtiene:

$$\vec{C}_B = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}; \text{ podemos comprobar que es nulo a partir de la ecuación}$$

del cambio de centro de momentos, cumpliéndose:

$$\vec{C}_B = \vec{C}_0 + \overrightarrow{BO} \wedge \vec{R} = -2\vec{i} + 2\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

b) El vector momento mínimo es un vector de módulo el tercer invariante y dirección la de la resultante. En este caso es nulo y podemos considerar que el punto B pertenece al eje central, su ecuación resulta:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{0}$$

De donde $x-1=0$; $z-1=0$, es decir: $x=1$; $z=1$;

La misma ecuación que si hubiésemos tomado el punto A de concurrencia.

PROBLEMA 3

Un sistema de vectores deslizantes está formado por los 4 vectores:

$$\vec{P}_1 = -2\vec{i} + 3\vec{k} \quad \text{.....} \quad A(2,1,0)$$

$$\vec{P}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} \quad \text{.....} \quad B(0,1,2)$$

$$\vec{P}_3 = -\vec{i} - \vec{j} \quad \text{.....} \quad C(-1,0,0)$$

$$\vec{P}_4 = \vec{i} - 2\vec{k} \quad \text{.....} \quad O(0,0,0)$$

Siendo A, B, C y O, puntos de sus respectivas rectas soporte. Calcular:

a) Momento resultante del s.v.d. respecto a los puntos O, A y B: $\vec{C}_O$; $\vec{C}_A$ y $\vec{C}_B$.

b) Invariantes.

c) Vector momento mínimo.

d) Ecuación del eje central en forma continua y como intersección de dos planos.

Resolución.

a) Se calculan los momentos resultantes del sistema de vectores deslizantes respecto a los puntos O, A y B:

$$\vec{C}_O = \vec{OA} \wedge \vec{P}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{P}_2 + \vec{OC} \wedge \vec{P}_3 + \vec{OO} \wedge \vec{P}_4$$

$$\vec{C}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

Para calcular los momentos respecto a los puntos A y B aplicamos la ecuación de cambio de centro de momentos, según la cual:

$$\vec{C}_A = \vec{C}_O + \vec{AO} \wedge \vec{R} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{k}$$

$$\vec{C}_B = \vec{C}_O + \vec{BO} \wedge \vec{R} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{j} + \vec{k}$$

b) Invariantes.

Primer invariante. La resultante es el vector: $\vec{R} = \vec{k}$ y su módulo la unidad.

Segundo invariante. Producto de la resultante por el momento resultante respecto a cualquier punto, $\vec{R} \cdot \vec{C}_O = \vec{R} \cdot \vec{C}_A = \vec{R} \cdot \vec{C}_B = 1$

Tercer invariante: es el cociente entre el primer y segundo invariante y coincide con el módulo del momento mínimo del sistema de vectores:

$$\frac{\vec{R} \cdot \vec{C}_O}{|\vec{R}|} = |\vec{C}_{\min}| = 1;$$

c) El vector momento mínimo es paralelo la resultante, por tanto:

$$\vec{C}_{\min} = \vec{k}$$

d) Obtenemos un punto del eje central a partir de la expresión:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{C_0}}{|\vec{R}|^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j}; \quad E(2,1,0)$$

La ecuación del eje central en forma continua se expresa por la ecuación:

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$$

También puede expresarse como intersección de los planos:

$$x = 2; \quad y = 1$$

PROBLEMA 4

Calcule el momento axial del vector deslizante $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$ respecto al eje OX sabiendo que su recta soporte pasa por el punto P(-1, 2, 0).

Resolución

El momento axial, M_{axial} , de un vector respecto a un eje viene dado por la proyección del momento del vector respecto a un punto del eje, sobre dicho eje. Es una magnitud escalar. Por ello, para calcular el momento axial del vector $\vec{v}$ respecto al eje OX, calculamos en primer lugar el momento de dicho vector respecto al origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$, dado que este punto pertenece a dicha recta,

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{v}) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}.$$

El momento axial del vector $\vec{v}$ respecto al eje OX viene dado por el producto escalar del momento por el versor $\vec{i}$.

$$M_{axial} = \overrightarrow{M_O}(\vec{v}) \cdot \vec{i} = (4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot \vec{i} = (4) \cdot 1 + (2) \cdot 0 + (-4) \cdot 0 = 4,$$

Hemos tenido en cuenta que el vector es paralelo a OX.

PROBLEMA 5

Sabiendo que la resultante de un sistema de vectores deslizantes concurrentes, cuyas rectas soporte se cortan en el origen es igual a $\vec{R} = \vec{i} - \vec{j}$, se pide:

- Calcular los invariantes del sistema.
- Hallar el momento respecto al punto $Q(1, 1, 1)$
- Obtener la ecuación del eje central en forma continua y como intersección de dos planos.

Resolución

- Invariantes del sistema

El primer invariante del sistema viene dado por la resultante del sistema:

$$\vec{R} = \vec{i} - \vec{j}.$$

El segundo invariante es igual al producto escalar de la resultante por el momento resultante. Dado que las rectas soporte de los vectores del sistema se cortan en el origen de coordenadas (sistema de vectores concurrentes), el momento resultante respecto a dicho punto es nulo.

$$\vec{C}_O = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O(\vec{v}_i) = 0,$$

por lo que el segundo invariante del sistema también lo será

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0.$$

El tercer invariante es igual al módulo del momento mínimo, que es también igual a cero:

$$|\vec{C}_{min}| = \frac{|\vec{C}_O \cdot \vec{R}|}{|\vec{R}|} = 0.$$

b) El momento respecto al punto $Q(1, 1, 1)$ viene dado por el Teorema de Varignon

$$\vec{C}_Q = \vec{QO} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

c) Ecuación del eje central

Dado que el momento resultante respecto al origen de coordenadas es nulo, dicho punto tiene momento mínimo y, por tanto, pertenece al eje central (EC). Además, como sabemos que dicho eje es paralelo a la resultante, la ecuación del EC en forma continua viene dada por:

$$\frac{x - O_x}{R_x} = \frac{y - O_y}{R_y} = \frac{z - O_z}{R_z},$$

$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 0}{-1} = \frac{z - 0}{0}.$$

La ecuación de uno de los planos, π_1 , cuya intersección define el EC se obtiene igualando el primer y el segundo término de la ecuación anterior

$$\pi_1: \frac{x - 0}{1} = \frac{y - 0}{-1} \Rightarrow y = -x$$

Mientras que la del otro plano, π_2 , se calcula igualando el segundo término con el tercero

$$\pi_2: \frac{y - 0}{-1} = \frac{z - 0}{0} \Rightarrow z = 0$$

La ecuación del eje central viene dada por la intersección de ambos planos